**5. Иррациональные уравнения(10 класс)**

**5.1. Введение**

**Определение.** Уравнение с одной переменной $f\left(x\right)=g\left(x\right)$называется иррациональным, если хотя бы одна из функций $f\left(x\right) или g\left(x\right)$ содержит переменную под знаком радикала.

При решении иррациональных уравнений необходимо установить область допустимых значений (ОДЗ) переменных, исходя из условия, что все радикалы, входящие в уравнение, должны быть арифметическими.

Материал, связанный с иррациональными уравнениями, составляет значительную часть школьного курса математики. Для их решения применяются ка стандартные так и нестандартные способы решения. Что же делать, когда не знаешь, когда не видишь способа решения иррационального уравнения?

1. Если уравнение имеет сложный вид и содержит несколько одинаковых выражений под знаком корня, стоит сделать соответствующую замену переменных и решить упрощенное уравнение без корней. Если имеются корни из двух различных выражений, то, иногда, заменив один из них новой переменной, так же можно прийти к более простому уравнению.
2. Если уравнение с квадратными корнями не может быть решено стандартными способами, можно применить общий метод решения таких уравнений, т. Е. следующую схему:
3. найти ОДЗ (область допустимых значений) данного уравнения;
4. для исключения квадратных корней возвести (возможно, после некоторых преобразований) обе части уравнения в квадрат;
5. найти корни полученного уравнения и отбросить те из них, которые не принадлежат ОДЗ;
6. путем непосредственной подстановки в исходное уравнение проверить, как из оставшихся корней действительно являются корнями данного уравнения.

**5.2. Теоретический материал**

*Стандартные и нестандартные методы решения иррациональных уравнений*

1. Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень.
2. Метод пристального взгляда (использование свойств функций).
3. Метод замены.
4. Метод разложения на множители выражений, входящих в уравнение.
5. Метод выделения полных квадратов.
6. Метод домножения обеих частей уравнения на сопряженное выражение.

**5.3. Методы, способы, приемы решения задач**

*Задания, решаемые методом возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень.*

**Задание №1.**Найти сумму корней уравнения $\sqrt[4]{x^{2}-2x-8}$ = 2.

**Варианты ответов:**  1) 6; 2) $-2$; 3) 2; 4) $-4$; 5) 24.

**Решение.**

Возводим обе части уравнения в 4 степень и решаем уравнение

$x^{2}-2x-8=16$, корнями которого являются числа :$-4$ и 6. Проверку делать не нужно, т. к. после возведения в степень подкоренное выражение оказалось равным положительному числу.

**Ответ: 3) 2.**

**Задание №2.**Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения$\sqrt{x+30}$ = *x*.

**Варианты ответов:**  1)$ -5$; 2) $5$; 3) 6; 4) $30$; 5) $-30.$

**Решение.**

Возводим обе части уравнения в квадрат, решаем квадратное уравнение$ x^{2}-x-30=0$, находя корни по формулам Виета, получим$x\_{1}=-5, x\_{2}=6.$Осуществляя проверку (подстановку найденных чисел в исходное уравнение), получаем, что $ число-5$ является посторонним корнем.

**Ответ: 3) 6.**

**Задание № 3.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

$\sqrt{15-\sqrt[3]{x-8 }}$= 2$\sqrt{3}$.

**Варианты ответов:**  1) 19; 2) $17$; 3) 35; 4) $1$; 5) 21.

**Решение.**

Возводим обе части уравнения в квадрат, решаем уравнение

$15-\sqrt[3]{x-8 }=12$ ,

$\sqrt[3]{x-8 }$ = 3,

$x-8=27$,

$$x=35.$$

**Ответ: 3) 35.**

**Задание № 4.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

$\sqrt{ x^{2}+\sqrt{5-4x}}$= $x-1$.

**Варианты ответов:**  1) 1; 2) $-1$; 3) 0; 4) $2$; 5) нет корней.

**Решение.**

Возводим обе части уравнения в квадрат, решаем уравнение

$ x^{2}+\sqrt{5-4x}$ =$ x^{2}-2x+1,$

$\sqrt{5-4x}$ = $-2x+1,$

$5-4x$ =$ 4x^{2}-4x+1,$

$$4x^{2}=4,$$

$$x= \pm 1.$$

Проверка показывает, что $-1$ является посторонним корнем.

**Ответ: 1) 1.**

**Задание № 5.**Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения$\sqrt[4]{x^{3}+12x}= \sqrt[4]{6x^{2}+8}.$

**Варианты ответов:**  1)$ 2$; 2) $-2$; 3) 0; 4) $-4$; 5) $нет корней.$

**Решение.**

Возводим обе части уравнения в четвертую степень, решаем уравнение

$$x^{3}+12x= 6x^{2}+8,$$

$$x^{3}-6x^{2}+12x-8=0,$$

$$\left(x-2\right)^{3}=0,$$

$$x=2.$$

 Осуществляя проверку, получаем, что число 2 является посторонним корнем.

**Ответ: 1) 2.**

**Задание № 6.**Найти среднее арифметическое корней уравнения

$$\sqrt{x}∙\sqrt{1-x}= x.$$

**Варианты ответов:**  1)$ 0,25$; 2) $ -0,25$; 3) 0; 4) $0,5$; 5) $1.$

**Решение.**

Возводим обе части уравнения в квадрат, решаем уравнение

$$x\left(1-x\right)=x^{2},$$

$$2x^{2}-x=0,$$

$$x\left(2x-1\right)=0,$$

$x=0$ или $x=0,5.$

Осуществляя проверку, получаем, что оба числа являются корнями уравнения.

Найдем среднее арифметическое этих чисел: $\frac{0+0,5}{2}=0,25.$

**Ответ: 1) 0,25.**

**Задание №7.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения$\sqrt{x-1}∙\sqrt{3x+1}=x+3.$

**Варианты ответов:**  1)$ 4$; 2) $ -1$; 3) 1; 4)$ -5$; 5) $5.$

**Решение.**

Возводим обе части уравнения в квадрат, решаем уравнение $\left(x-1\right)\left(3x+1\right)= x^{2}+6x+9,$

$$2x^{2}-8x-10=0,$$

$x^{2}-4x-5=0,$находя корни по формулам Виета, получим$x\_{1}=-1, x\_{2}=5.$Осуществляя проверку (подстановку найденных чисел в исходное уравнение), получаем, что число -1 является посторонним корнем.

**Ответ: 5) 5.**

**Задание № 8.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения$\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}=x.$

**Варианты ответов:**  1)$ 2$; 2) $ 4$; 3) $-2$; 4) 0; 5)$ -4.$

**Решение.**

$\sqrt{x+2}= x-\sqrt{2-x }$( возводим обе части уравнения в квадрат),

$x+2= x^{2}-x+2-2x\sqrt{2-x}$,

$$2x\sqrt{2-x}= x^{2}-2x,$$

$$2x\sqrt{2-x}- x^{2}+2x=0,$$

$$x(2\sqrt{2-x}-x+2)=0,$$

$x=0$ или $2\sqrt{2-x}-x+2=0$,

$$2\sqrt{2-x}=x-2,$$

 $8-4x= x^{2}+4-4x,$

 $ x^{2}-4=0,$

 $x=\pm 2.$

Осуществляя проверку (подстановку найденных чисел в исходное уравнение), получаем, что числа $-2и 0$ являются посторонними корнями.

**Ответ: 1) 2.**

**Задание № 9.**Найти произведение меньшего корня на количество корней уравнения$\sqrt{4- x^{2}}\left( x^{2}-6x+5\right)=0.$

**Варианты ответов:**  1)$ 3$; 2) $ 4$; 3) $-8$; 4) 2; 5)$ -6.$

**Решение.**

Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю, при условии, что подкоренное выражение не должно принимать отрицательных значений. Получим: $4- x^{2}=0$ или $ x^{2}-6x+5=0.$ Корнями первого уравнения являются числа $-2$ и $2$, а корнями второго уравнения числа 5 и 1.

Осуществляя проверку (подстановку найденных чисел в исходное уравнение), получаем, что число $5$ является посторонним корнем.

**Ответ: 5)**$-6$**.**

*Метод пристального взгляда (использование свойств функций)*

**1. Решение уравнений с использованием области определения входящих в них функций.**

**Задание № 1.** Решить уравнение $\sqrt{x-5}+\sqrt{1-x}=7.$

**Варианты ответов:**  1)$ 5$; 2) $ 1$; 3) $7$; 4)нет корней; 5)$ -6.$

**Решение.**

Найдем область определения этого уравнения:

$$\left\{\begin{array}{c}x-5\geq 0,\\1-x\geq 0; \end{array}\left\{\begin{array}{c}x\geq 5,\\x\leq 1.\end{array}\right.\right.$$

Эта система неравенств решений не имеет, значит и исходное уравнение решений не имеет.

**Ответ: 4) нет корней.**

**Задание № 2.** Решить уравнение $\sqrt{ x^{2}-4x+3}+\sqrt{- x^{2}+3x-2}=\sqrt{ x^{2}-x}.$

**Варианты ответов:**  1)$ 3$; 2) $ 1$; 3) $2$; 4)нет корней; 5)$ 0.$

**Решение.**

Найдем область определения этого уравнения:

$$\left\{\begin{array}{c} x^{2}-4x+3\geq 0,\\- x^{2}+3x-2\geq 0,\\ x^{2}-x\geq 0;\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}x\leq 1 или x\geq 3, \\1\leq x\leq 2,\\x\leq 0 или x\geq 1;\end{array} x=1.\right.$$

Поскольку область определения уравнения состоит из одного числа, то проверим, является ли оно корнем уравнения, подставив число 1 в исходное уравнение: $\sqrt{0}+\sqrt{0}=\sqrt{0}- $ верное равенство, значит, число 1 является корнем уравнения.

**Ответ: 4) нет корней.**

**2. Решение уравнений с помощью области значений функций.**

Иногда при решении уравнений полезно сравнивать множества значений функций, находящихся в левой и правой частях уравнения.

**Задание № 1.** Решить уравнение $1+\sqrt{x+3}=0.$

**Варианты ответов:**  1)$ 3$; 2) $ 0$; 3) $4$; 4)нет корней; 5)$ -3.$

**Решение.**

Областью определения уравнения является промежуток [$-3; +\infty ). $ Поскольку функция$y=1+\sqrt{x+3}$ с такой областью определения

 может принимать значения не меньше 1, а в правой части уравнения 0, то уравнение решений не имеет.

**Ответ: 4) нет корней.**

**Задание № 2.** Решить уравнение $\sqrt{-x+3}+\sqrt{x-2}=\left(x-7\right)^{2}\left(x-5\right).$

**Варианты ответов:**  1)$ -3$; 2) $ 2$; 3) $1$; 4)нет корней; 5)$ 7.$

**Решение.**

Найдем область определения функции $f\left(x\right)=\sqrt{-x+3}+\sqrt{x-2}:$

$$\left\{\begin{array}{c}-x+3\geq 0,\\x-2\geq 0; \end{array} 2\leq \right.x\leq 3.$$

На найденном промежутке функция$f\left(x\right)$ принимает только положительные значения, а функция $g\left(x\right)=\left(x-7\right)^{2}\left(x-5\right)$только отрицательные значения (проверяется подстановкой), поэтому уравнение $f\left(x\right)= g\left(x\right)$ решений не имеет, следовательно, решений не имеет и данное уравнение.

**Ответ: 4) нет корней.**

**3. Решение уравнений с использованием свойства монотонности функции.**

Решение уравнений с использованием свойств монотонности входящих в него функций, основано на следующих теоремах.

Теорема 1: если функция*f*(*x*) строго возрастает или строго убывает на промежутке*I*, то уравнение*f*(*x*) = *a*, где*a*$ -$ некоторое действительное число, может иметь не более одного корня на этом промежутке.

Теорема 2: если одна из функций*f*(*x*),$ g\left(x\right) $строго возрастает, а другая строго убывает на промежутке*I*, то уравнение$f\left(x\right)= g\left(x\right)$ может иметь не более одного корня на этом промежутке.

**Задание № 1.** Решить уравнение $\sqrt{3x-2}=1.$

**Варианты ответов:**  1)$ -1$; 2) $ 1$; 3) $0$; 4)нет корней; 5)$ 2.$

**Решение.**

Областью определения уравнения является промежуток [$\frac{2}{3}; +\infty ).$ Поскольку линейная функция $y=3x-2$является возрастающей, то и функция

$ y=\sqrt{3x-2}$ является возрастающей. Значит, на промежутке [$\frac{2}{3}; +\infty ) $ уравнение $\sqrt{3x-2}=1$ может иметь не более одного корня.Легко догадаться, что решением данного уравнения является число 1.

**Ответ: 2)**$1$**.**

**Задание № 2.** Решить уравнение $\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{x+7}=4.$

**Варианты ответов:**  1)$ -1$; 2) $ 1$; 3) $-7$; 4)нет корней; 5)$\frac{1}{5} .$

**Решение.**

Рассмотрим функцию $f\left(x\right)=\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{x+7}$. Областью определения этой функции является промежуток [$0,2; +\infty ). $ Данная функция является возрастающей (как сумма возрастающих функций), значит, уравнение $f\left(x\right)=4$ может иметь не более одного корня. Легко заметить , что решением данного уравнения является число 1.

**Ответ: 2)**$1$**.**

**Задание № 3.** Решить уравнение $\sqrt{\left(x+2\right)\left(2x-1\right)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{\left(x+6\right)\left(2x-1\right)}+3\sqrt{x+2}.$

**Варианты ответов:**  1)$ -6$; 2) $-2$; 3) $7$; 4)нет корней; 5)$\frac{1}{2} .$

**Решение.**

Областью определения уравнения является промежуток [$\frac{1}{2}; +\infty ). $ Используя свойства корней и некоторые тождественные преобразования, данное уравнение можно записать в виде$\left(\sqrt{\left(x+2\right)}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{\left(2x-1\right)}-3\right)=4.$ Рассмотрим функцию $f\left(x\right)=\left(\sqrt{\left(x+2\right)}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{\left(2x-1\right)}-3\right).$ Она является возрастающей, а значит уравнение $f\left(x\right)=4$ может иметь не более одного корня. Подбором находим, что корнем уравнения является число 7.

**Ответ: 3)**$7$**.**

**4.Решение уравнений, в правой и левой частях которых находятся ограниченные функции.**

Напомним, что функция$y=f(x)$, определенная на множестве$ X$, называется ограниченной снизу, если существует такое число *А ,*что *А*$\leq f(x)$ для любого$x\in X.$

Функция$y=f(x)$, определенная на множестве$ X$, называется ограниченной сверху, если существует такое число *В ,*что *В*$\geq f(x)$ для любого$x\in X.$

Решение уравнений, используя ограниченность функций, основывается на следующих теоремах.

Теорема 1. Если на некотором множестве $X$ функции$ f(x)$и $g\left(x\right)$ ограничены сверху(снизу) соответственно числами *a*и *b*, т. е. выполняются неравенства

$f(x)\leq $*a*и$ g\left(x\right)\leq $*b (*$f(x)\geq $*a*и$ g\left(x\right)\geq $*b)*, то на множестве $X$ уравнение

$f\left(x\right)+ g\left(x\right)$*=a*$+ $*b* равносильно системе уравнений$\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)=a,\\ g\left(x\right)=b.\end{array}\right.$

Теорема 2. Если на некотором множестве $X$ функции$f(x)$и $g\left(x\right)$ ограничены соответственно снизу и сверху числом *a*, т. е. выполняются неравенства

$f(x)\geq $*a,*$ g\left(x\right)\leq $*a,* то на множестве $X$ уравнение $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ равносильно системе уравнений$\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right) = a,\\ g\left(x\right) =a.\end{array}\right.$

**Задание № 1.** Решить уравнение $\sqrt{x^{2}+4}+\sqrt{x^{2}+1}=3-5x^{2}.$

**Варианты ответов:**  1)$ -4$; 2) $ 5$; 3) $-1$; 4)нет корней; 5)$ 0 .$

**Решение.**

Левая часть уравнения положительна и определена при любых значениях переменной $x$, правая часть неотрицательна при $x\in \left[-\sqrt{\frac{3}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}}\right]$. Т. к. $\sqrt{x^{2}+4}\geq 2$ и $\sqrt{x^{2}+1}\geq 1$, то $\sqrt{x^{2}+4}+\sqrt{x^{2}+1}\geq 3$. Но $3-5x^{2}\leq 3$, тогда по теореме 2 решение исходного уравнения равносильно системе$\left\{\begin{array}{c}\sqrt{x^{2}+4}+\sqrt{x^{2}+1}=3,\\3-5x^{2} =3.\end{array}\right.$

Решая систему, находим, что корень уравнения равен 0.

**Ответ: 5)**$0$**.**

**5.Решение уравнений с использованием свойства непрерывности входящих в них функций.**

При решении уравнений иногда пользуются непрерывностью соответствующей функции. Свойство непрерывности функции удобно применять, когда требуется доказать, что уравнение $f\left(x\right)=0$ имеет хотя бы один действительный корень, где $f\left(x\right)-$непрерывная функция.

При решении уравнений полезно использовать следующую теорему.

Теорема. Пусть функция $f\left(x\right)$ определена, непрерывна и монотонна на множестве $X$, причем множество значений этой функции *Y*. Тогда существует функция $g\left(x\right)$, обратная функции $f\left(x\right), $ область определения которой *Y*, а множество значений $X$, непрерывная и монотонная. Тогда уравнения

$f\left(x\right)=g\left(x\right)$ и $f\left(x\right)=x$ равносильны, если $f\left(x\right)$ возрастает, и уравнение $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ является следствием уравнения $f\left(x\right)=x$, если $f\left(x\right)$ убывает.

**Задание № 1.** Решить уравнение $\sqrt[3]{2-x}=2-x^{3}.$

**Варианты ответов:**  1)$ 4$; 2) $ 2$; 3) $1$; 4)нет корней; 5)$ 0 .$

**Решение.**

Рассмотрим функцию $f\left(x\right)= 2-x^{3},$ она непрерывна на всей числовой прямой. Найдем функцию $g\left(x\right)$, обратную $f\left(x\right):$

$f\left(x\right)= 2-x^{3},x^{3}=2-f\left(x\right),x=\sqrt[3]{2-f\left(x\right)}.$ Следовательно, $g\left(x\right)$=$\sqrt[3]{2-x}$ и получается, что$ f(x)$ = $g\left(x\right). $Тогда по теореме $2-x^{3}=x,$

$$\left(x-1\right)\left(x^{2}+x+2\right)=0, x=1.$$

**Ответ: 3)**$1$**.**

**Задание № 2.** Решить уравнение$x=\sqrt{\sqrt{x}-\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}.$

**Варианты ответов:**  1)$ 4$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $1$; 4)нет корней; 5)$ 0 .$

$$.$$

**Решение.**

Областью определения уравнения является промежуток [$0; +\infty ). $

Запишем уравнение в виде $x+\frac{1}{4}=\sqrt{\sqrt{x}-\frac{1}{4}}.$ Т. к. $x+\frac{1}{4}>0$ при $x\in $[$0; +\infty ),$

то получим $\left(x+\frac{1}{4}\right)^{2}=\sqrt{x}-\frac{1}{4}. $

Пусть $f\left(x\right)=\left(x+\frac{1}{4}\right)^{2}$, тогда $g\left(x\right)=\sqrt{x}-\frac{1}{4}.$ По теореме данное уравнение равносильно уравнению $\left(x+\frac{1}{4}\right)^{2}=x,$ откуда $x=\frac{1}{4}.$

**Ответ: 2)**$\frac{1}{4}$**.**

*Решение уравнений методом замены*

Введение вспомогательной переменной в ряде случаев приводит к упрощению уравнения. Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал. При этом уравнение становится рациональным относительно новой переменной.

**Задание № 1.**Найти произведение корней уравнения$ 3x^{2}-8\sqrt{x^{2}}-3=0.$

**Варианты ответов:**  1)$ -1$; 2)$ -9$; 3) $3$; 4)9; 5)$ 27.$

**Решение.**

Т. к. $\sqrt{x^{2}}=\left|x\right| $и $x^{2}=\left|x\right|^{2}$, то введем замену: $\left|x\right|=t.$Решим уравнение $3t^{2}-8t-3=0$ относительно новой переменной.Вычислив дискриминант и используя формулы корней квадратного уравнения, получим *t1 =*$ -3,$

*t2 =*$\frac{1}{3}.$Обратная замена дает два уравнения $\left|x\right|=3$ и $\left|x\right|=-\frac{1}{3}, $ второе из которых не имеет корней, а корнями первого являются числа $-3$ и $3,$ произведение которых равно $-9.$

**Ответ: 2)**$-9$**.**

**Задание № 2.**Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения$\sqrt[4]{x^{2}-2x}+\sqrt{x^{2}-2x}-2=0.$

**Варианты ответов:**  1)$ 2$; 2)$ -2$; 3) $1$; 4)$-1$; 5)$ 1 $+ $\sqrt{2}.$

**Решение.**

Введем замену$\sqrt[4]{x^{2}-2x}=t, $тогда $\sqrt{x^{2}-2x}=t^{2}$и уравнение примет вид

$t^{2}+t-2=0,$корнями которого являются числа $-2$ и 1. Обратная замена дает два уравнения $\sqrt[4]{x^{2}-2x}=-2$ и $\sqrt[4]{x^{2}-2x}=1$. Первое уравнение корней не имеет. Решаем второе уравнение возведением обеих его частей в 4 степень. Получим $x^{2}-2x=1.$ Корнями последнего уравнения являются числа $1-\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$, произведение которых равно $-1.$

**Ответ: 4)**$-1$**.**

**Задание № 3.**Найти среднее арифметическое корней уравнения

$$x^{2}+3x-6\sqrt{x^{2}+3x+24}+8=0.$$

**Варианты ответов:**  1)$ 8$; 2)$ -8$; 3) $5$; 4)$ -5$; 5)$ -1,5.$

**Решение.**

Запишем уравнение в другом виде:
$x^{2}+3x+24-6\sqrt{x^{2}+3x+24}-16=0$ и введем замену

$$\sqrt{x^{2}+3x+24}=t.$$

Решим уравнение $t^{2}-6t-16=0 $относительно новой переменной*t.*

Корнями этого уравнения являются числа $-2$ и 8. Обратная замена дает два уравнения $\sqrt{x^{2}+3x+24}=-2$ и $\sqrt{x^{2}+3x+24}=8,$ первое из которых не имеет корней, а второе решаем возведением обеих частей в квадрат:

$x^{2}+3x+24=64.$ Приведя последнее уравнение к стандартному виду и решив его, получим корни $-8$ и 5, среднее арифметическое которых равно $-1,5.$

**Ответ: 5)**$–1,5$**.**

**Задание № 4.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1.$$

**Варианты ответов:**  1)$ 3$; 2)$ 12$; 3) $13$; 4)$ 11$; 5)$-12.$

**Решение.**

Введем новые переменные: пусть $\sqrt[3]{2-x}=y, \sqrt{x-1}=z \left(z\geq 0\right),$получим систему уравнений: $\left\{\begin{array}{c}x+z=1,\\y^{3}+z^{2}=1; \end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}y=1-z,\\\left(1-z\right)^{3}+z^{2}=1.\end{array}\right.$

Решая второе уравнение системы, получим: $1-3z+3z^{2}-z^{3}=1,$

$$z^{3}-4z^{2}+3z=0,$$

$$z\left(z^{2}-4z+3\right)=0,$$

$z=0$ илши $z^{2}-4z+3=0,$

$z\_{1}=1$ или $z\_{2}=3.$

Обратная замена дает три уравнения: $\sqrt{x-1}=0$, $\sqrt{x-1}=1,\sqrt{x-1}=3,$ решая которые получим, что $x=1$ или$ x=2$ или$ x=10.$

Сумма корней уравнения равна 13.

**Ответ: 3)**$13$**.**

*Метод разложения на множители выражений, входящих в уравнение*

**Задание № 1.**Найти среднее арифметическое корней уравнения

$$\left(x+1\right)\sqrt{16x+17}=\left(x+1\right)\left(8x-23\right).$$

**Варианты ответов:**  1)$ 1,5$; 2)$ 0,5$; 3) $-\frac{5}{3}$; 4)$\frac{5}{3}$; 5)$ 1.$

**Решение.**

Запишем уравнение в другом виде:
$\left(x+1\right)\sqrt{16x+17}-\left(x+1\right)\left(8x-23\right)=0.$Вынеся за скобки общий множитель, получим $\left(x+1\right)\left(\sqrt{16x+17}-\left(8x-23\right)\right)=0, $откуда

$x+1=0$ или $\sqrt{16x+17}-\left(8x-23\right)=0.$

Решая первое уравнение, получим, что $x=-1.$

Решая первое уравнение, получим, что $\sqrt{16x+17}=8x-23.$ Возведя обе части уравнения в квадрат и приведя его к стандартному виду, имеем

$64x^{2}-384x+512=0,$разделим обе части уравнения на 64, получим

$x^{2}-6x+8=0$. Корнями последнего уравнения являются числа 2 и 4. Выполняя проверку, получим, что 2$ –$ посторонний корень, поэтому среднее арифметическое корней исходного уравнения равно $1,5.$

**Ответ: 5)**$1,5$**.**

**Задание № 2.**Найти произведение меньшего корня на количество корней уравнения$\sqrt{2x^{2}-2x-8}\left(2x+7\right)+2x^{2}+7x=0.$

**Варианты ответов:**  1)$ -3,5$; 2)$ -2$; 3) $-7$; 4) 2; 5)$ -14.$

**Решение.**

Запишем уравнение в другом виде и решим его:

$$\sqrt{2x^{2}-2x-8}\left(2x+7\right)+x\left(2x+7\right)=0,$$

$$\left(2x+7\right)\left(\sqrt{2x^{2}-2x-8}+x\right)=0,$$

$2x+7=0$ или $\sqrt{2x^{2}-2x-8}+x=0,$
$x=-3,5$ или $\sqrt{2x^{2}-2x-8}=- x,$

$$2x^{2}-2x-8=x^{2},$$

$$x^{2}-2x-8=0,$$

$x\_{1}=4$или $x\_{2}=-2.$

Выполняя проверку, получим, что $-2-$ посторонний корень, а произведение меньшего корня на количество корней уравнения равно $-7.$

**Ответ: 3)**$ -7$**.**

**Задание № 3.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения$\sqrt{7x+x^{2}}+\sqrt[4]{x^{2}+14x+49}∙\sqrt{-x}=4\sqrt{2}.$

**Варианты ответов:**  1)$ -8$; 2)$ 1$; 3) $8$; 4)$ -7$; 5)$ 7.$

**Решение.**

$$\sqrt{x\left(x+7\right)}+\sqrt[4]{\left(x+7\right)^{2}}∙\sqrt{-x}=4\sqrt{2}.$$

Т. к. подкоренное выражение не может быть отрицательным, значит $-x\geq 0,$

значит $x\leq 0.$ Т. к. $x\left(x+7\right)\geq 0$ и $x\leq 0$, то $x+7\leq 0$ и уравнение примет вид
$\sqrt{x\left(x+7\right)}+\sqrt{-\left(x+7\right)}∙\sqrt{-x}=4\sqrt{2},$ т е. $\sqrt{x\left(x+7\right)}$+$\sqrt{x\left(x+7\right)}$=$ 4\sqrt{2},$

2 $\sqrt{x\left(x+7\right)}$=$ 4\sqrt{2},$

$\sqrt{x\left(x+7\right)}$=$ 2\sqrt{2},$

$$x\left(x+7\right)=8,$$

$$x^{2}+7x-8=0,$$

$x\_{1}=1$или $x\_{2}=-8.$

Выполняя проверку, получим, что $1-$посторонний корень, значит уравнение имеет единственный корень$ – $число $-8.$

**Ответ: 1)**$ -8$**.**

**Задание № 4.**Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения$\sqrt{\left(x-2\right)\left(x-4\right)}-2\sqrt{4-x}-\sqrt[4]{x^{2}-4x+4}+2=0.$

**Варианты ответов:**  1)$ -2$; 2)$ 1$; 3) $5$; 4)$ -6$; 5)$ 3.$

**Решение.**

$$\sqrt{\left(x-2\right)\left(x-4\right)}-2\sqrt{4-x}-\sqrt[4]{\left(x-2\right)^{2}}+2=0.$$

Т. к. подкоренное выражение не может быть отрицательным, значит

$4-x\geq 0,$ значит $x-4\leq 0.$ Т. к. $\left(x-2\right)\left(x-4\right)\geq 0$ и $x-4\leq 0$, то

$x-2\leq 0$ и уравнение примет вид
$\sqrt{\left(x-2\right)\left(x-4\right)}-2\sqrt{4-x}-\sqrt{-\left(x-2\right)}+2=0$ или

$\sqrt{\left(2-x\right)\left(4-x\right)}-2\sqrt{4-x}-\sqrt{2-x}+2=0$ или

$$\sqrt{2-x}∙\sqrt{4-x}-2\sqrt{4-x}-\sqrt{2-x}+2=0.$$

Для разложения на множители применим способ группировки

$$\left(\sqrt{2-x}∙\sqrt{4-x}-\sqrt{2-x}\right)+\left(-2\sqrt{4-x}+2\right)=0,$$

$\sqrt{2-x}\left(\sqrt{4-x}-1\right)-2\left(\sqrt{4-x}-1\right)$= 0,

$$\left(\sqrt{4-x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}-2\right)=0,$$

$\sqrt{4-x}-1=0$ или $\sqrt{2-x}-2=0,$

$\sqrt{4-x}=1$ или $\sqrt{2-x}=2,$

$4-x=1$ или $2-x=4,$

$x=3$ или $x=-2.$

Выполняя проверку, получим, что $3-$посторонний корень, значит уравнение имеет единственный корень$ – $число $-2.$

**Ответ: 1)**$ -2$**.**

*Метод выделения полных квадратов при решении иррациональных уравнений*

При решении некоторых иррациональных уравнений полезно использовать формулу $\sqrt{a^{2}}=\left|a\right|$.

**Задание № 1.**Найти сумму целых решений уравнения

$$\sqrt{x^{2}-6x+9}+\sqrt{4x^{2}+12x+9}=x+6.$$

**Варианты ответов:**  1)$ 8$; 2)$ 3$; 3) $5$; 4)$ 7$; 5)$ 6.$

**Решение.**

Запишем подкоренные выражения в виде квадратов:

$\sqrt{\left(x-3\right)^{2}}+\sqrt{\left(2x+3\right)^{2}}=x+6. $ Используя формулу$\sqrt{a^{2}}=\left|a\right|,$ получим

$\left|x-3\right|+\left|2x+3\right|=x+6. $ Решаем последнее уравнение методом промежутков (см. раздел «Решение уравнений, содержащих переменную под знаком модуля»). Нули модулей $–$ числа 3 и $–1,5–$ разбивают числовую прямую на следующие промежутки: ($–\infty ;–1,5$), [$–1,5;3$) и [3; +$ \infty $).

Решим уравнение на промежутке ($–\infty ;–1,5$):

$$-x+3+2x+3= x+6,$$

$$-4x=6,$$

$$x=-1,5.$$

Найденное значение не принадлежит рассматриваемому промежутку, поэтому на данном интервале уравнение не имеет корней.

Решим уравнение на промежутке $[–1,5;3)$:

$$-x+3-2x-3= x+6,$$

$$0∙x=0,$$

$x- $любое число, а значит решением уравнения является сам промежуток .Решим уравнение на промежутке $[3; + \infty )$:

$$x-3+2x+3= x+6,$$

$$2x=6,$$

$$x=3.$$

Найденное значение принадлежит рассматриваемому промежутку, поэтому является корнем уравнения.

Итак, решением уравнения является промежуток $\left[–1,5;3\right],$ которому принадлежат целые числа $–1; 0; 1; 2; 3,$ сумма которых равна 5.

**Ответ: 3)**$ 5$**.**

*Умножение обеих частей уравнения или числителя и знаменателя дроби, входящей в состав уравнения, на выражение, сопряженное данному иррациональному*

**Задание № 1.**Найти произведение меньшего корня на количество корней уравнения

$$\frac{\sqrt{18-3x}-\sqrt{18+3x}}{\sqrt{18-3x}+\sqrt{18+3x}}=-\frac{6}{x}.$$

**Варианты ответов:**  1)$ -24$; 2)$ 0$; 3) $8$; 4) $-$12; 5)$ 12.$

**Решение.**

Умножим числитель и знаменатель левой части уравнения на выражение, сопряженное знаменателю, получим
$$\frac{36-2\sqrt{18-3x}∙\sqrt{18+3x}}{-6x}=-\frac{6}{x},$$

$$\frac{18-\sqrt{18-3x}∙\sqrt{18+3x}}{-3x}=-\frac{6}{x},$$

$$\frac{18-\sqrt{18-3x}∙\sqrt{18+3x}}{-3x}=-\frac{18}{3x},$$

$$18-\sqrt{18-3x}∙\sqrt{18+3x}=18,$$

$$\sqrt{18-3x}∙\sqrt{18+3x}=0,$$

$18-3x=0$ или $18+3x=0,$

$x=6$ или $x=-6.$

Выполняя проверку, получим, что оба числа являются корнями уравнения.

**Ответ: 4)**$ -12$**.**

**Задание № 2.**Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения$ (\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x-3}+4)=x.$

**Варианты ответов:**  1)$ -1$; 2)$ 1$; 3) $\frac{47}{16}$; 4) $\frac{57}{16}$; 5)$ 0.$

**Решение.**

Умножим обе части уравнения на выражение $(\sqrt{x+4}+2)$, получим

$x\left(\sqrt{x-3}+4\right)=x(\sqrt{x+4}+2)$,

$x\left(\sqrt{x-3}+4\right)-x\left(\sqrt{x+4}+2\right)=0$,

$$x\left(\sqrt{x-3}+4-\sqrt{x+4}-2\right)=0,$$

$x=6$ или $\sqrt{x-3}+4-\sqrt{x+4}-2=0,.$

$$\sqrt{x-3}-\sqrt{x+4}=-2,$$

$$\sqrt{x-3}=\sqrt{x+4}-2,$$

$$x-3=x+4+4-4\sqrt{x+4},$$

$4\sqrt{x+4}=$11,

$$x+4=\frac{121}{16},$$

$$x=\frac{57}{16}.$$

Выполняя проверку, получим, что найденное число является корнем уравнения.

**Ответ: 4)**$\frac{57}{16}$**.**

**Задания для самостоятельной работы**

**Задание № 1.**Какие из уравнений: а)$\sqrt[4]{x+4}=0; $б)$\sqrt[7]{x-2}=-3;$ в$)\sqrt[8]{1-2x}=-\sqrt{2}; $ г) $\sqrt{5x}=4;$ д) $\sqrt[5]{x+11}=1 $имеют корни?

**Варианты ответов:**  1)$ а, г, д$; 2)$ б, г, д$; **3) а, б, г, д;** 4) г, д; 5)$ а, б, в, г, д.$

**Задание № 2.**Какие из уравнений: а)$\sqrt[12]{5x+6}=2; $б)$\sqrt[9]{7-4x}=-17;$ в$)\sqrt[6]{x}=-x^{2}-1; $ г) $\sqrt[5]{6x+7}+8=0;$ д) $\sqrt[10]{3x+5}+3=0$ не имеют корней?

**Варианты ответов:**  1)$ б, г, д$; 2)$ б, в, д$; 3) а, б, г, д;**4) в, д;** 5)$ б, в, г, д.$

**Задание № 3.**Найти корни уравнения $\frac{2x^{2}-4x}{\sqrt{1-x}}=0.$

**Варианты ответов:**  1)$x=1$; **2)**$x=0$**;** 3)$x=2, x=0$;

4)$x=1, x=0,x=2$; 5) нет корней.

**Задание № 4.**Найти корни уравнения $\frac{x^{2}+x-6}{\sqrt{4-x^{2}}}=0.$

**Варианты ответов:**  1)$x=2$; 2)$x=-3$; 3)$x=2, x=-3$;

4)$x=-2, x=2$; **5) нет корней.**

**Задание № 5.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $x^{2}-4\left(\sqrt{x}\right)^{2}-12=0.$

**Варианты ответов: 1)**$6$**;**2)$ 36$; 3)$ 4$; 4)$ -2$; 5) 40.

**Задание № 6.**Найти среднее арифметическое корней уравнения $\sqrt[7]{x^{3}-x^{2}-2x-1}=-1.$

**Варианты ответов:** 1)$ 0,5$;2)$-0,5$; 3)$ -\frac{1}{3}$;**4)** $\frac{1}{3}$**;**5) 1.

**Задание № 7.**Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{x+30}=x.$

**Варианты ответов:** 1)$ -5$;2)$ 5$;**3)**$ 6$**;** 4)$ 30$; 5)$-30$.

**Задание № 8.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt[3]{3-\sqrt[4]{x+1}}=-1.$

**Варианты ответов:** 1)$ 256$;2)$ 257$; 3)$ 15$;**4)**$ 255$**;**5) 210.

**Задание № 9.**Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{x^{2}+1-\sqrt{4x^{2}-x^{4}+16}}=-x-1.$

**Варианты ответов:** 1)$ 2$; **2)**$ -2$**;**3)$ 0$; 4)$ -4$; 5)нет корней.

**Задание № 10.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{20-x^{2}}=\sqrt{-8x}$.

**Варианты ответов:** 1)$ 8$;**2)**$ -2$**;** 3)$ 10$;4)$-8$;5)$-$10.

**Задание № 11.**Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{x^{2}+32}-2\sqrt[4]{x^{2}+32}=3.$

**Варианты ответов:** 1)$ 0$;2)$ -1$;3)$ 7$; 4)$ -7$; **5)**$ -49$ .

**Задание № 12.**Найти произведение большего корня на количество корней уравнения $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}$+$\sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}}=\frac{5}{2}.$

**Варианты ответов: 1)**$ 4$**;**2)$ -4$;3)$ 5$; 4)$ -5$; 5)$ 6$ .

**Задание № 13.**Найти сумму различных корней (или корень, если он один) уравнения $x^{2}-4x-\sqrt{2x^{2}-8x+12}+6=0.$

**Варианты ответов:** 1)$ 8$;2)$ 4$;**3)**$ 2$**;**4)$-8$;5)$-$4.

**Задание № 14.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}=x.$

**Варианты ответов: 1)**$ 2$**;** 2)$ 4$; 3)$ -2$;4)$ 0$;5)$-$4.

**Задание № 15.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{3-11x}-4x+\frac{4x^{2}}{\sqrt{3-11x}}=0.$

**Варианты ответов:** 1)$-3$;**2)**$ 0,25$**;** 3)$ -2,75$;4)$ 2,75$;5)$-$0,25.

**Задание № 16.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt[4]{9+4x^{2}-12x}+\sqrt{2x-3}=14.$

**Варианты ответов:** 1)$ 24$;2)$ 14$; 3)$ 28$;4)$ 13$;**5)** $26$**.**

**Задание № 17.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt[4]{-x^{2}+6x}+\sqrt[4]{x^{2}}∙\sqrt{6-x}=2\sqrt{5}.$

**Варианты ответов:** 1)$ -5$;**2)**$ 6$**;** 3)$ 5$;4)$ 1$;5) $-6$.

**Задание № 18.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{x^{2}+7x}+\sqrt[4]{x^{2}+14x+49}∙\sqrt{-x}=4\sqrt{2}.$

**Варианты ответов: 1)**$ -8$**;** 2)$ 1$; 3)$ 8$;4)$ -7$;5) $7$.

**Задание № 19.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{x^{2}-5x+3}-\sqrt{x^{2}-12x+3}=x.$

**Варианты ответов: 1)**$ -1$**;**2)$ 1$; 3)$ 11\frac{1}{3}$;4)$ 12\frac{1}{3}$;5) $0$.

**Задание № 20.**Найти сумму корней уравнения $\sqrt{x^{4}-6x^{3}+9x^{2}}=2.$

**Варианты ответов:** 1)$ -6$; 2)$ 3$; 3)$ 5$;4)$ -3$;**5)** $6$**.**

**Задание № 21.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x-12}=1.$

**Варианты ответов:** 1)$ 18$; 2)$ 12$;**3)**$ 13$**;**4)$ 11$;5) $-12$.