**5. Иррациональные уравнения(10 класс)**

**5.1. Введение**

**Определение.** Уравнение с одной переменной называется иррациональным, если хотя бы одна из функций содержит переменную под знаком радикала.

При решении иррациональных уравнений необходимо установить область допустимых значений (ОДЗ) переменных, исходя из условия, что все радикалы, входящие в уравнение, должны быть арифметическими.

Материал, связанный с иррациональными уравнениями, составляет значительную часть школьного курса математики. Для их решения применяются ка стандартные так и нестандартные способы решения. Что же делать, когда не знаешь, когда не видишь способа решения иррационального уравнения?

1. Если уравнение имеет сложный вид и содержит несколько одинаковых выражений под знаком корня, стоит сделать соответствующую замену переменных и решить упрощенное уравнение без корней. Если имеются корни из двух различных выражений, то, иногда, заменив один из них новой переменной, так же можно прийти к более простому уравнению.
2. Если уравнение с квадратными корнями не может быть решено стандартными способами, можно применить общий метод решения таких уравнений, т. Е. следующую схему:
3. найти ОДЗ (область допустимых значений) данного уравнения;
4. для исключения квадратных корней возвести (возможно, после некоторых преобразований) обе части уравнения в квадрат;
5. найти корни полученного уравнения и отбросить те из них, которые не принадлежат ОДЗ;
6. путем непосредственной подстановки в исходное уравнение проверить, как из оставшихся корней действительно являются корнями данного уравнения.

**5.2. Теоретический материал**

*Стандартные и нестандартные методы решения иррациональных уравнений*

1. Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень.
2. Метод пристального взгляда (использование свойств функций).
3. Метод замены.
4. Метод разложения на множители выражений, входящих в уравнение.
5. Метод выделения полных квадратов.
6. Метод домножения обеих частей уравнения на сопряженное выражение.

**5.3. Методы, способы, приемы решения задач**

*Задания, решаемые методом возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень.*

**Задание №1.**Найти сумму корней уравнения = 2.

**Варианты ответов:**  1) 6; 2) ; 3) 2; 4) ; 5) 24.

**Решение.**

Возводим обе части уравнения в 4 степень и решаем уравнение

, корнями которого являются числа : и 6. Проверку делать не нужно, т. к. после возведения в степень подкоренное выражение оказалось равным положительному числу.

**Ответ: 3) 2.**

**Задание №2.**Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения = *x*.

**Варианты ответов:**  1); 2) ; 3) 6; 4) ; 5)

**Решение.**

Возводим обе части уравнения в квадрат, решаем квадратное уравнение, находя корни по формулам Виета, получимОсуществляя проверку (подстановку найденных чисел в исходное уравнение), получаем, что является посторонним корнем.

**Ответ: 3) 6.**

**Задание № 3.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

= 2.

**Варианты ответов:**  1) 19; 2) ; 3) 35; 4) ; 5) 21.

**Решение.**

Возводим обе части уравнения в квадрат, решаем уравнение

,

= 3,

,

**Ответ: 3) 35.**

**Задание № 4.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

= .

**Варианты ответов:**  1) 1; 2) ; 3) 0; 4) ; 5) нет корней.

**Решение.**

Возводим обе части уравнения в квадрат, решаем уравнение

=

=

=

Проверка показывает, что является посторонним корнем.

**Ответ: 1) 1.**

**Задание № 5.**Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2) ; 3) 0; 4) ; 5)

**Решение.**

Возводим обе части уравнения в четвертую степень, решаем уравнение

Осуществляя проверку, получаем, что число 2 является посторонним корнем.

**Ответ: 1) 2.**

**Задание № 6.**Найти среднее арифметическое корней уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2) ; 3) 0; 4) ; 5)

**Решение.**

Возводим обе части уравнения в квадрат, решаем уравнение

или

Осуществляя проверку, получаем, что оба числа являются корнями уравнения.

Найдем среднее арифметическое этих чисел:

**Ответ: 1) 0,25.**

**Задание №7.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2) ; 3) 1; 4); 5)

**Решение.**

Возводим обе части уравнения в квадрат, решаем уравнение

находя корни по формулам Виета, получимОсуществляя проверку (подстановку найденных чисел в исходное уравнение), получаем, что число -1 является посторонним корнем.

**Ответ: 5) 5.**

**Задание № 8.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2) ; 3) ; 4) 0; 5)

**Решение.**

( возводим обе части уравнения в квадрат),

,

или ,

Осуществляя проверку (подстановку найденных чисел в исходное уравнение), получаем, что числа являются посторонними корнями.

**Ответ: 1) 2.**

**Задание № 9.**Найти произведение меньшего корня на количество корней уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2) ; 3) ; 4) 2; 5)

**Решение.**

Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю, при условии, что подкоренное выражение не должно принимать отрицательных значений. Получим: или Корнями первого уравнения являются числа и , а корнями второго уравнения числа 5 и 1.

Осуществляя проверку (подстановку найденных чисел в исходное уравнение), получаем, что число является посторонним корнем.

**Ответ: 5).**

*Метод пристального взгляда (использование свойств функций)*

**1. Решение уравнений с использованием области определения входящих в них функций.**

**Задание № 1.** Решить уравнение

**Варианты ответов:**  1); 2) ; 3) ; 4)нет корней; 5)

**Решение.**

Найдем область определения этого уравнения:

Эта система неравенств решений не имеет, значит и исходное уравнение решений не имеет.

**Ответ: 4) нет корней.**

**Задание № 2.** Решить уравнение

**Варианты ответов:**  1); 2) ; 3) ; 4)нет корней; 5)

**Решение.**

Найдем область определения этого уравнения:

Поскольку область определения уравнения состоит из одного числа, то проверим, является ли оно корнем уравнения, подставив число 1 в исходное уравнение: верное равенство, значит, число 1 является корнем уравнения.

**Ответ: 4) нет корней.**

**2. Решение уравнений с помощью области значений функций.**

Иногда при решении уравнений полезно сравнивать множества значений функций, находящихся в левой и правой частях уравнения.

**Задание № 1.** Решить уравнение

**Варианты ответов:**  1); 2) ; 3) ; 4)нет корней; 5)

**Решение.**

Областью определения уравнения является промежуток [ Поскольку функция с такой областью определения

может принимать значения не меньше 1, а в правой части уравнения 0, то уравнение решений не имеет.

**Ответ: 4) нет корней.**

**Задание № 2.** Решить уравнение

**Варианты ответов:**  1); 2) ; 3) ; 4)нет корней; 5)

**Решение.**

Найдем область определения функции

На найденном промежутке функция принимает только положительные значения, а функция только отрицательные значения (проверяется подстановкой), поэтому уравнение решений не имеет, следовательно, решений не имеет и данное уравнение.

**Ответ: 4) нет корней.**

**3. Решение уравнений с использованием свойства монотонности функции.**

Решение уравнений с использованием свойств монотонности входящих в него функций, основано на следующих теоремах.

Теорема 1: если функция*f*(*x*) строго возрастает или строго убывает на промежутке*I*, то уравнение*f*(*x*) = *a*, где*a* некоторое действительное число, может иметь не более одного корня на этом промежутке.

Теорема 2: если одна из функций*f*(*x*),строго возрастает, а другая строго убывает на промежутке*I*, то уравнение может иметь не более одного корня на этом промежутке.

**Задание № 1.** Решить уравнение

**Варианты ответов:**  1); 2) ; 3) ; 4)нет корней; 5)

**Решение.**

Областью определения уравнения является промежуток [ Поскольку линейная функция является возрастающей, то и функция

является возрастающей. Значит, на промежутке [ уравнение может иметь не более одного корня.Легко догадаться, что решением данного уравнения является число 1.

**Ответ: 2).**

**Задание № 2.** Решить уравнение

**Варианты ответов:**  1); 2) ; 3) ; 4)нет корней; 5)

**Решение.**

Рассмотрим функцию . Областью определения этой функции является промежуток [ Данная функция является возрастающей (как сумма возрастающих функций), значит, уравнение может иметь не более одного корня. Легко заметить , что решением данного уравнения является число 1.

**Ответ: 2).**

**Задание № 3.** Решить уравнение

**Варианты ответов:**  1); 2) ; 3) ; 4)нет корней; 5)

**Решение.**

Областью определения уравнения является промежуток [ Используя свойства корней и некоторые тождественные преобразования, данное уравнение можно записать в виде Рассмотрим функцию Она является возрастающей, а значит уравнение может иметь не более одного корня. Подбором находим, что корнем уравнения является число 7.

**Ответ: 3).**

**4.Решение уравнений, в правой и левой частях которых находятся ограниченные функции.**

Напомним, что функция, определенная на множестве, называется ограниченной снизу, если существует такое число *А ,*что *А* для любого

Функция, определенная на множестве, называется ограниченной сверху, если существует такое число *В ,*что *В* для любого

Решение уравнений, используя ограниченность функций, основывается на следующих теоремах.

Теорема 1. Если на некотором множестве функциии ограничены сверху(снизу) соответственно числами *a*и *b*, т. е. выполняются неравенства

*a*и*b (a*и*b)*, то на множестве уравнение

*=ab* равносильно системе уравнений

Теорема 2. Если на некотором множестве функциии ограничены соответственно снизу и сверху числом *a*, т. е. выполняются неравенства

*a,a,* то на множестве уравнение равносильно системе уравнений

**Задание № 1.** Решить уравнение

**Варианты ответов:**  1); 2) ; 3) ; 4)нет корней; 5)

**Решение.**

Левая часть уравнения положительна и определена при любых значениях переменной , правая часть неотрицательна при . Т. к. и , то . Но , тогда по теореме 2 решение исходного уравнения равносильно системе

Решая систему, находим, что корень уравнения равен 0.

**Ответ: 5).**

**5.Решение уравнений с использованием свойства непрерывности входящих в них функций.**

При решении уравнений иногда пользуются непрерывностью соответствующей функции. Свойство непрерывности функции удобно применять, когда требуется доказать, что уравнение имеет хотя бы один действительный корень, где непрерывная функция.

При решении уравнений полезно использовать следующую теорему.

Теорема. Пусть функция определена, непрерывна и монотонна на множестве , причем множество значений этой функции *Y*. Тогда существует функция , обратная функции область определения которой *Y*, а множество значений , непрерывная и монотонная. Тогда уравнения

и равносильны, если возрастает, и уравнение является следствием уравнения , если убывает.

**Задание № 1.** Решить уравнение

**Варианты ответов:**  1); 2) ; 3) ; 4)нет корней; 5)

**Решение.**

Рассмотрим функцию она непрерывна на всей числовой прямой. Найдем функцию , обратную

Следовательно, = и получается, что = Тогда по теореме

**Ответ: 3).**

**Задание № 2.** Решить уравнение

**Варианты ответов:**  1); 2) ; 3) ; 4)нет корней; 5)

**Решение.**

Областью определения уравнения является промежуток [

Запишем уравнение в виде Т. к. при [

то получим

Пусть , тогда По теореме данное уравнение равносильно уравнению откуда

**Ответ: 2).**

*Решение уравнений методом замены*

Введение вспомогательной переменной в ряде случаев приводит к упрощению уравнения. Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал. При этом уравнение становится рациональным относительно новой переменной.

**Задание № 1.**Найти произведение корней уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2); 3) ; 4)9; 5)

**Решение.**

Т. к. и , то введем замену: Решим уравнение относительно новой переменной.Вычислив дискриминант и используя формулы корней квадратного уравнения, получим *t1 =*

*t2 =*Обратная замена дает два уравнения и второе из которых не имеет корней, а корнями первого являются числа и произведение которых равно

**Ответ: 2).**

**Задание № 2.**Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2); 3) ; 4); 5)+

**Решение.**

Введем заменутогда и уравнение примет вид

корнями которого являются числа и 1. Обратная замена дает два уравнения и . Первое уравнение корней не имеет. Решаем второе уравнение возведением обеих его частей в 4 степень. Получим Корнями последнего уравнения являются числа и , произведение которых равно

**Ответ: 4).**

**Задание № 3.**Найти среднее арифметическое корней уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2); 3) ; 4); 5)

**Решение.**

Запишем уравнение в другом виде:   
 и введем замену

Решим уравнение относительно новой переменной*t.*

Корнями этого уравнения являются числа и 8. Обратная замена дает два уравнения и первое из которых не имеет корней, а второе решаем возведением обеих частей в квадрат:

Приведя последнее уравнение к стандартному виду и решив его, получим корни и 5, среднее арифметическое которых равно

**Ответ: 5).**

**Задание № 4.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2); 3) ; 4); 5)

**Решение.**

Введем новые переменные: пусть получим систему уравнений:

Решая второе уравнение системы, получим:

илши

или

Обратная замена дает три уравнения: , решая которые получим, что или или

Сумма корней уравнения равна 13.

**Ответ: 3).**

*Метод разложения на множители выражений, входящих в уравнение*

**Задание № 1.**Найти среднее арифметическое корней уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2); 3) ; 4); 5)

**Решение.**

Запишем уравнение в другом виде:  
Вынеся за скобки общий множитель, получим откуда

или

Решая первое уравнение, получим, что

Решая первое уравнение, получим, что Возведя обе части уравнения в квадрат и приведя его к стандартному виду, имеем

разделим обе части уравнения на 64, получим

. Корнями последнего уравнения являются числа 2 и 4. Выполняя проверку, получим, что 2 посторонний корень, поэтому среднее арифметическое корней исходного уравнения равно

**Ответ: 5).**

**Задание № 2.**Найти произведение меньшего корня на количество корней уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2); 3) ; 4) 2; 5)

**Решение.**

Запишем уравнение в другом виде и решим его:

или   
 или

или

Выполняя проверку, получим, что посторонний корень, а произведение меньшего корня на количество корней уравнения равно

**Ответ: 3).**

**Задание № 3.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2); 3) ; 4); 5)

**Решение.**

Т. к. подкоренное выражение не может быть отрицательным, значит

значит Т. к. и , то и уравнение примет вид   
 т е. +=

2 =

=

или

Выполняя проверку, получим, что посторонний корень, значит уравнение имеет единственный кореньчисло

**Ответ: 1).**

**Задание № 4.**Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2); 3) ; 4); 5)

**Решение.**

Т. к. подкоренное выражение не может быть отрицательным, значит

значит Т. к. и , то

и уравнение примет вид   
 или

или

Для разложения на множители применим способ группировки

= 0,

или

или

или

или

Выполняя проверку, получим, что посторонний корень, значит уравнение имеет единственный кореньчисло

**Ответ: 1).**

*Метод выделения полных квадратов при решении иррациональных уравнений*

При решении некоторых иррациональных уравнений полезно использовать формулу .

**Задание № 1.**Найти сумму целых решений уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2); 3) ; 4); 5)

**Решение.**

Запишем подкоренные выражения в виде квадратов:

Используя формулу получим

Решаем последнее уравнение методом промежутков (см. раздел «Решение уравнений, содержащих переменную под знаком модуля»). Нули модулей числа 3 и разбивают числовую прямую на следующие промежутки: (), [) и [3; +).

Решим уравнение на промежутке ():

Найденное значение не принадлежит рассматриваемому промежутку, поэтому на данном интервале уравнение не имеет корней.

Решим уравнение на промежутке :

любое число, а значит решением уравнения является сам промежуток .Решим уравнение на промежутке :

Найденное значение принадлежит рассматриваемому промежутку, поэтому является корнем уравнения.

Итак, решением уравнения является промежуток которому принадлежат целые числа сумма которых равна 5.

**Ответ: 3).**

*Умножение обеих частей уравнения или числителя и знаменателя дроби, входящей в состав уравнения, на выражение, сопряженное данному иррациональному*

**Задание № 1.**Найти произведение меньшего корня на количество корней уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2); 3) ; 4) 12; 5)

**Решение.**

Умножим числитель и знаменатель левой части уравнения на выражение, сопряженное знаменателю, получим

или

или

Выполняя проверку, получим, что оба числа являются корнями уравнения.

**Ответ: 4).**

**Задание № 2.**Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2); 3) ; 4) ; 5)

**Решение.**

Умножим обе части уравнения на выражение , получим

,

,

или

11,

Выполняя проверку, получим, что найденное число является корнем уравнения.

**Ответ: 4).**

**Задания для самостоятельной работы**

**Задание № 1.**Какие из уравнений: а)б) в г) д) имеют корни?

**Варианты ответов:**  1); 2); **3) а, б, г, д;** 4) г, д; 5)

**Задание № 2.**Какие из уравнений: а)б) в г) д) не имеют корней?

**Варианты ответов:**  1); 2); 3) а, б, г, д;**4) в, д;** 5)

**Задание № 3.**Найти корни уравнения

**Варианты ответов:**  1); **2);** 3);

4); 5) нет корней.

**Задание № 4.**Найти корни уравнения

**Варианты ответов:**  1); 2); 3);

4); **5) нет корней.**

**Задание № 5.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов: 1);**2); 3); 4); 5) 40.

**Задание № 6.**Найти среднее арифметическое корней уравнения

**Варианты ответов:** 1);2); 3);**4) ;**5) 1.

**Задание № 7.**Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:** 1);2);**3);** 4); 5).

**Задание № 8.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:** 1);2); 3);**4);**5) 210.

**Задание № 9.**Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:** 1); **2);**3); 4); 5)нет корней.

**Задание № 10.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения .

**Варианты ответов:** 1);**2);** 3);4);5)10.

**Задание № 11.**Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:** 1);2);3); 4); **5)** .

**Задание № 12.**Найти произведение большего корня на количество корней уравнения +

**Варианты ответов: 1);**2);3); 4); 5) .

**Задание № 13.**Найти сумму различных корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:** 1);2);**3);**4);5)4.

**Задание № 14.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов: 1);** 2); 3);4);5)4.

**Задание № 15.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:** 1);**2);** 3);4);5)0,25.

**Задание № 16.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:** 1);2); 3);4);**5) .**

**Задание № 17.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:** 1);**2);** 3);4);5) .

**Задание № 18.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов: 1);** 2); 3);4);5) .

**Задание № 19.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов: 1);**2); 3);4);5) .

**Задание № 20.**Найти сумму корней уравнения

**Варианты ответов:** 1); 2); 3);4);**5) .**

**Задание № 21.**Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения

**Варианты ответов:** 1); 2);**3);**4);5) .